Hermann Minkowski

Raum und Zeit

Hermann
Minkowski
Raum und
Zeit

H. Minkowski

Según una fotografía de Emil Logès, Zurich.

ESPACIO Y TIEMPO

CONFERENCIA, PRONUNCIADA EN LA 80ª REUNIÓN DE
CIENTÍFICOS NATURALES EN COLONIA,
EL 21 DE SEPTIEMBRE DE 1908.

POR

HERMAN MINKOWSKI

CON LA IMAGEN DE HERMAN MINKOWSKI
ASÍ COMO UN PRÓLOGO POR A. GUTZMER

Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO, Omar Ancka Quispe

LEIPZIG Y BERLÍN
IMPRESO Y PUBLICADO POR B. G. TEUBNER
1909

REIMPRESION ESPECIAL DESDE EL VOLUMEN 18 DEL INFORME ANUAL DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA ALEMANA.

Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO, Omar Ancka Quispe

Prólogo

La conferencia sobre "Espacio y Tiempo" que Hermann Minkowski pronunció en la Reunión de Médicos y Científicos Naturales Alemanes en Colonia, constituye la última de sus geniales creaciones. Lamentablemente, no se le ha concedido completar la ampliación más fina de su audaz proyecto, una mecánica, en la que el tiempo está coordinado con las tres dimensiones del espacio. Porque, el 12 de enero de este año, un destino trágico ha arrebatado abruptamente al autor de la ciencia, de sus seres queridos y de sus amigos en el apogeo de su vida y de su obra, estimado por igual como hombre y como investigador.

Este entusiasmado y comprensivo interés, que había despertado su conferencia, llenó de satisfacción interior a Minkowski, y él desearía que sus planteamientos fueran accesibles a círculos más amplios mediante una edición especial. Es un doloroso deber de piedad y amistad para la librería Editorial de B. G. Teubner y el que suscribe, cumplir por la presente este último deseo del difunto.

Halle a. S., 20 de Febrero de 1909.

A. Gutzmer

Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO, Omar Ancka Quispe

¡Muy Honorables! Las concepciones sobre *el Espacio y el Tiempo*, que me gustaría desarrollar ante ustedes, han crecido en terrenos de la física experimental. En ello reside su fuerza. Su tendencia es una radical. A partir de ahora, el Espacio por si solo y el Tiempo por si solo, deben de hundirse completamente en las sombras y únicamente una especie de unión de ambos debe preservar su independencia.

I.

En primer lugar, me gustaría explicar como se podría llegar a cambiar las ideas sobre el Espacio y el Tiempo, desde la mecánica aceptada actualmente, probablemente a través de una consideración puramente matemática. Las ecuaciones de la Mecánica Newtoniana muestran una doble invarianza. Una es, cuando la base utilizada en el sistema de coordenadas espaciales se somete a un arbitrario *cambio de posición*, su forma permanece inalterada; la segunda, cuando se hace cambios en su estado de movimiento, es decir, le imprimimos cualquier *traslación uniforme*; incluso el punto cero del tiempo no desempeña ningún papel. Uno está acostumbrado a considerar los axiomas de la geometría como terminados cuando uno se siente preparado para los axiomas de la Mecánica, y probablemente por eso estas dos invarianzas rara vez se mencionan al mismo tiempo. En cada una de ellas, está implicado un cierto grupo de transformaciones para las ecuaciones diferenciales de la Mecánica. La existencia del primer grupo se puede ver como una característica fundamental del espacio. El segundo grupo se penaliza, por preferencia, despreciándolo para superar fácilmente su significado al respecto, de que aquí a partir de los fenómenos físico nunca se podrán decidir; si el espacio, que se presupone en reposo, no está situado finalmente en una traslación uniforme. Así estos dos grupos llevan una existencia completamente separada, uno al lado del otro. Su carácter completamente más heterogéneo puede haberles disuadido de componerlos. Pero, precisamente, el grupo completo compuesto como un todo, nos proporciona el *que pensar* al respecto.

Tenemos la intención de buscar ejemplificar estas relaciones gráficamente. Sean x, y, z las coordenadas rectangulares para el espacio y t denota el tiempo. Los objetos de nuestra percepción siempre están vinculados solamente a lugares y tiempos. Nadie se ha fijado en *un espacio* como lo

Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO, Omar Ancka Quispe

contrario de un tiempo, *un tiempo* como lo contrario de un espacio. Sin embargo todavía estoy respetando el dogma; que el Espacio y el Tiempo tienen cada uno un significado independiente. Quiero, a un *punto del espacio* respecto de un *punto en el tiempo*, es decir, un sistema de valores x, y, z, t; llamarlo un *punto del mundo.* La multiplicidad de todos los sistemas de valores x, y, z, t concebibles, debería llamarse *el mundo.* Yo podría, con una tiza *más audaz*, proyectar los cuatro ejes del mundo en la pizarra. Ya un eje dibujado se compone de ruidosas moléculas oscilantes y permite asimismo el recorrido de la tierra en el espacio, así que ya existe bastante de abstracción en si; esa abstracción ligeramente mayor asociada con la 4-cantidad, no hará ningún daño al matemático. Para no dejar un vacío absoluto en ninguna parte, tratemos de imaginar que *algo* perceptible esta presente por todas partes y en todo momento. Para no decir materia o electricidad, quisiera utilizar para ese *algo* la palabra *sustancia.* Dirigimos nuestra atención sobre un *punto de esa sustancia* existente en el punto de mundo x, y, z, t y nos preguntamos si somos capaces de reconocer a este *punto sustancial*, en cada uno de los otros tiempos. Un elemento de tiempo dt puede corresponder a los cambios dx, dy, dz de las coordenadas espaciales de este *punto sustancial.* Obtenemos entonces, como imagen, una curva en el mundo, por así decirlo, para el eterno curso de la vida del *punto sustancial*; una linea de mundo, cuyos puntos se dejan relacionar claramente con el parámetro t, desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El mundo entero aparece disuelto en dichas líneas de mundo, y me gustaría anticipar inmediatamente que, según mi opinión, las leyes físicas deberían encontrar su más perfecta expresión como interrelaciones entre estas líneas de mundo.

A través de los conceptos de *Espacio y Tiempo*, entran de forma separada la variedad x, y, z para $t = 0$ y sus dos lados $t > 0$ y $t < 0$. Si, por motivos de simplicidad, mantenemos fijo el punto cero del Espacio y Tiempo, entonces significa que podemos someter los ejes x, y, z en $t = 0$, del primer grupo mencionado de la Mecánica, a una rotación cualquiera alrededor del punto cero conforme a las transformaciones lineales homogéneas de la expresión

$$x^2 + y^2 + z^2$$

en sí. Sin embargo, en el segundo grupo significa que también podemos reemplazar

$$x,\ y,\ z,\ t \quad \text{por} \quad x - \alpha t,\ y - \beta t,\ z - \gamma t,\ t$$

con cualquier constante α, β, γ, sin cambiar la expresión de las leyes mecánicas. Según esto, se puede dar al eje temporal una dirección completamente arbitraria después de la mitad superior del mundo, es decir $t > 0$. Ahora,

Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO, Omar Ancka Quispe

¿qué tiene que ver la exigencia de ortogonalidad en los ejes espaciales con esta completa libertad del eje temporal hacia la parte de arriba?

Para establecer la conexión, tomaremos un parámetro c positivo y consideraremos esta estructura

$$c^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1\,.$$

Esta se compone de dos *cuencos* separados por $t = 0$, análogo a un hiperboloide de dos hojas. Vamos a considerar el *cuenco* en la región $t > 0$ y pongamos ahora esas transformaciones lineales homogéneas de x, y, z, t en cuatro nuevas variables x', y', z', t', las que en consecuencia serán la expresión para este *cuenco* en las nuevas variables. A estas transformaciones, obviamente, pertenecen las rotaciones de los ejes espaciales alrededor del punto cero. Conseguiremos una completa comprensión del resto de esas transformaciones, si contemplamos tomar una de entre ellas, en la que y y z permanezcan invariantes. Dibujaremos la sección de este *cuenco* (Fig. 1) en el plano de los ejes x y t; la rama superior de la hipérbola $c^2\,t^2 - x^2 = 1$ con sus asíntotas. Además, voy a inscribir un radio vector cualquier OA' en esta rama de la hipérbola, desde el punto cero O hacia *la tangente* en A', colocada en la hipérbola hasta la intersección B' con la asíntota de la derecha: $OA'B'$, para completar el paralelogramo $OA'B'C'$, por último el subsiguiente todavía $B'C'$ se lleva hasta la intersección D' con el eje x. Vamos a tomar ahora OC' y OA' como los ejes de las coordenadas x', t' paralelas con escalas $OC' = 1$, $OA' = 1/c$, entonces esa rama de la hipérbola adquiere otra vez la expresión $c^2\,t'^2 - x'^2 = 1$, $t' > 0$, y el traspaso de x, y, z, t a x', y, z, t' será una de las transformaciones en cuestión. Ahora, tomaremos a las aún transformaciones caracterizadas, añadir los desplazamientos arbitrarios del punto cero del espacio y tiempo, y así constituir un grupo de transformaciones que obviamente aún dependerán del parámetro c, que lo denoto con G_c.

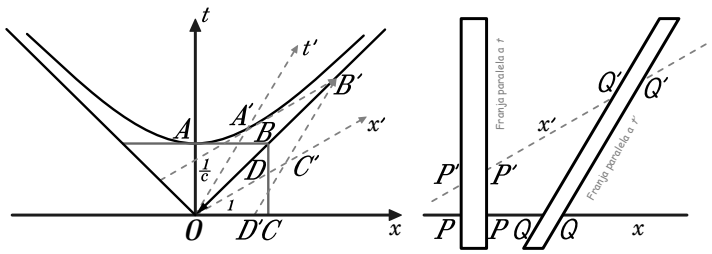

Fig. 1.

Dejamos ahora que c crezca hacia el infinito, de este modo $1/c$ convergerá a cero, entonces es claro a partir de la figura descrita que la rama de la hipérbola se arrima cada vez más al eje x, el ángulo de la asíntota se ensancha a uno alargado, esta transformación especial en el límite se convierte en uno de este tipo: en el que el eje t' puede tener una dirección cualquiera hacia arriba y x' se aproxima a x cada vez con mayor precisión. Con respecto a esto, está claro que de hecho el grupo

G_c en el límite para $c = \infty$, es decir como grupo G_∞, será precisamente aquel grupo completo correspondiente a la mecánica newtoniana. En esta situación, y dado que G_c es matemáticamente más fácil de entender que G_∞, seguramente un matemático de imaginación más libre podría haber sido capaz de incurrir en esa idea; que al final los fenómenos naturales poseen en realidad una invarianza, no en el grupo G_∞ sino más bien en un grupo G_c con un determinado c finito, *extremadamente grande* solo en las unidades de medida habituales. Una intuición así podría haber sido un extraordinario triunfo de la matemática pura. Ahora, que la matemática ya sólo expresa aquí *"el ingenio de la escalera"*, aún le queda la satisfacción que ella, gracias a sus afortunados antecedentes con sus sentidos agudizados en libre vista panorámica, es capaz de capturar las profundas consecuencias de semejante remodelación de nuestra concepción de la naturaleza sobre el terreno.

Quisiera decir inmediatamente; ¿alrededor de que valor para c?, se está operando finalmente. Para c se dará, *la velocidad de propagación de la luz en el espacio vacío.* Para no hablar del espacio ni del vacío, podemos nuevamente caracterizar esta magnitud como la relación entre la unidad electromagnética y la de electrostática, de la *"cantidad de electricidad".*

La existencia de la invarianza de las leyes de la naturaleza para el grupo relevante G_c tendría que ser comprendida ahora de esta manera:

A partir de la totalidad de los fenómenos naturales, se puede derivar mediante aproximaciones sucesivamente crecientes, cada vez con mayor precisión, un sistema de referencia x, y, z y t, el *Espacio y Tiempo*, mediante el cual se representan estos fenómenos según ciertas leyes. Pero este sistema de referencia de ningún modo está al mismo tiempo establecido inequívocamente por los fenómenos. *Este sistema de referencia todavía puede cambiarse a voluntad según las transformaciones del mencionado grupo G_c, sin que con esto, se cambie la expresión de las leyes de la naturaleza.*

Por ejemplo, también se puede designar al tiempo t' conforme a la figura descrita, pero entonces, en conexión con eso, necesariamente tengo que definir el espacio mediante la variedad de los tres parámetros x', y, z, con lo cual ahora las leyes físicas se expresarían, exactamente del mismo modo, sea mediante x', y, z, t', como por medio de x, y, z, t. Entonces, en lo sucesivo se tendrá en el mundo ya no *el espacio* sino un infinito número de espacios, de forma análoga a como se da un infinito número de planos en el espacio tridimensional. La geometría tridimensional será un capítulo de la física cuatridimensional. Pueden ver, por qué dije en la *Introducción* que el espacio y el tiempo deberían de hundirse en las sombras y permanecer solamente un mundo en sí.

II.

Ahora la cuestión es; ¿qué circunstancias nos imponen el cambio de concepción del *Espacio y Tiempo*?, de hecho nunca se contradice con los fenómenos, por último ¿nos ofrece ventajas para la descripción de los fenómenos?

Antes de responder sobre esto, se debe anticipar una importante observación. Si tenemos individualizado el Espacio y Tiempo de alguna manera, entonces como *línea de mundo*; una linea recta paralela al eje t corresponde a un *punto sustancial* en reposo; una linea recta inclinada contra el eje t, un *punto sustancial* en movimiento uniforme; una linea de mundo curvada de alguna forma, un *punto sustancial* en movimiento no uniforme. Si tomamos, en un *punto de mundo* arbitrario x, y, z, t, la línea del mundo que pasa por ahí, y que, la encontramos allí en paralelo a algún radio vector OA' del cuenco hiperboloidico antes mencionado, entonces podemos introducir OA' como un nuevo eje temporal y así, con los nuevos conceptos del Espacio y Tiempo proporcionados, la sustancia en ese punto del mundo en cuestión aparece como en reposo. Ahora, queremos introducir este axioma fundamental:

La sustancia presente en un arbitrario punto de mundo siempre se puede considerar como en reposo, en el Espacio y Tiempo convenientemente fijados.

Este axioma significa que en cada *punto de mundo*, la expresión

$$c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

siempre resulta positivo o, lo que es equivalente, que toda velocidad v siempre resulta menor que c. De acuerdo con esto se tendría que c existiría como el limite superior para todas las *velocidades sustanciales* y aquí yace precisamente el significado más profundo de la magnitud c. En esta versión diferente, *el axioma* tiene a primera vista algo desagradable. Pero se debe de considerar que ahora se afianzará en el puesto una Mecánica modificada, en el que ingresa la raíz cuadrada de esa combinación diferencial de segundo grado, de modo que, los casos con velocidad superior a la de la luz ya solo desempeñarán un papel como, por ejemplo, las representaciones gráficas con coordenadas imaginarias en la geometría.

El *impulso* y el auténtico motivo para *la adopción del grupo* G_c ya venía de ahí, porque la ecuación diferencial para la propagación de las ondas de luz en el espacio vacío está dotado de ese grupo G_c [1]). Por otra parte, el término *cuerpo rígido* solamente tiene *significado* en una mecánica con el grupo G_∞. Se tiene ahora una óptica con G_c, y si además hubiera

[1]) Una aplicación esencial de este hecho ya se encuentra en W. Voigt, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften en Gotinga, 1887, p. 41.

cuerpos rígidos, entonces es fácilmente previsible que *una* dirección t se podría caracterizar mediante los dos cuencos hiperboloidicos pertenecientes a G_c y G_∞, y eso podría tener la subsiguiente consecuencia, que debería ser posible percibir, en el laboratorio mediante adecuados instrumentos ópticos rígidos, un cambio en los fenómenos para diferentes orientaciones contra la dirección de avance de la tierra. Sin embargo, todos los esfuerzos dirigidos a este objetivo, en particular un famoso experimento de interferencia de Michelson, tuvieron un resultado negativo. Para obtener una explicación al respecto, H. A. Lorentz formuló una hipótesis cuyo éxito radica precisamente en la invarianza de la óptica para el grupo G_c. Según Lorentz, todo cuerpo que posea un movimiento debería haber experimentado una contracción en la dirección del movimiento, y de echo para una velocidad v, en la proporción

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{1}$$

Esta hipótesis suena extremadamente fantástica. Porque la contracción no está pensada como resultado de, por ejemplo, resistencias en el éter, sino puramente como un don de lo alto, como una circunstancia que acompaña al hecho del movimiento.

Ahora quisiera mostrar en nuestra figura anterior, que la hipótesis lorentziana es completamente equivalente con la nueva concepción del *Espacio y Tiempo*, permitiendo que sea mucho más fácil de entender. Por motivos de simplicidad, vamos a excluir los ejes y y z, e imaginemos un mundo en el espacio unidimensional, entonces hay una franja paralela vertical tal como el eje t; y otra inclinada respecto del eje t (véase Fig. 1); son imágenes para el transcurso de un cuerpo en reposo, en relación con un cuerpo en movimiento uniforme, que siempre conservan una *extensión espacial* constante. OA' está en paralelo a la segunda franja, entonces podemos introducir t' como eje del tiempo y x' de la coordenada espacial, y ahora el segundo cuerpo aparece como en reposo, el primero como moviéndose uniformemente. Vamos a asumir ahora que el primer cuerpo, considerado como en reposo, tiene la longitud l, es decir, la sección transversal PP de la primera franja sobre el eje x es $= l \cdot OC$, donde OC representa la *escala unitaria* en el eje x; y que al mismo tiempo, el segundo cuerpo considerado como en reposo tiene la misma longitud l, entonces esto último significa que la sección transversal de la segunda franja, medida paralelamente al eje x', es $Q'Q' = l \cdot OC'$. Tenemos ahora en estos dos cuerpos las imágenes para dos electrones lorentzianos idénticos, uno en reposo y otro en movimiento uniforme. Pero, si nos mantenemos firmes en las coordenadas originales x, t, entonces, la *extensión espacial* del segundo electrón, se indicará como la sección transversal QQ de su franja correspondiente, en paralelo con el eje x. Ahora, dado

que $Q'Q' = l \cdot OC'$, es evidente que $QQ = l \cdot OD'$. Si para la segunda franja dx/dt es $= v$, un sencillo cálculo devuelve $OD' = OC \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, así también $PP : QQ = 1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Pero este es el significado de la hipótesis de Lorentz para la contracción de los electrones en movimiento. Por otro lado, si consideramos que el segundo electrón está en reposo, es decir adoptamos el sistema de referencia x', t', entonces la longitud del primero se puede designar como la sección transversal $P'P'$ de su franja, paralela a OC', y encontraríamos que el primer electrón estaría acortado frente al segundo en exactamente aquella misma proporción; como está en la figura

$$P'\,P' : Q'\,Q' = O\,D : O\,C' = O\,D' : O\,C = Q\,Q : P\,P\,.$$

Lorentz llamó a la relación de t' para x y t *tiempo local* del electrón en movimiento uniforme, y usó una construcción física de este término para una mejor comprensión de la hipótesis de la contracción. Sin embargo el haber reconocido con agudeza, que el tiempo de un electrón es tan bueno como el del otro, es decir, que t y t' se deben de tratar de forma idéntica, es solo el mérito de A. Einstein [1]). Con ello, el tiempo era ahora destituido primeramente como un concepto inequívocamente definido por los fenómenos. Ni Einstein ni Lorentz alteraron el concepto del espacio, quizás no por ese motivo, porque en la transformación especial mencionada, donde el plano x', t' coincide con el plano x, t, es posible una interpretación, como si el eje x del espacio consiguiera permanecer en su posición. En efecto, pasar por sobre el concepto del espacio de manera correspondiente, probablemente solo se podría catalogar como una audacia de la cultura matemática. Sin embargo, después de este siguiente paso, aunque indispensable para una verdadera comprensión del grupo G_c, la expresión *Postulado de Relatividad* para el requisito de una *invarianza* en el grupo G_c me parece muy débil. Si el significado del postulado es que solo a través de los fenómenos en el Espacio y Tiempo se da ese mundo cuatridimensional aun cuando la proyección en el espacio y en el tiempo todavía se pueda hacer con una cierta libertad, entonces me gustaría poner a esta afirmación el nombre de *Postulado del Mundo Absoluto* (o abreviando el Postulado del Mundo).

III.

Mediante el *Postulado del Mundo* es posible un tratamiento idéntico para los cuatro elementos determinantes x, y, z, t. De esta manera, como

[1]) A. Einstein, Annalen der Physik, Vol. 17, 1905, Página 891; Anuario de Radiactividad y Electrónica, Vol. 4, 1907, Página 411.

explicaré ahora, las formas bajo las cuales se desarrollan las leyes de la física adquieren mayor comprensibilidad. Sobre todo, el concepto de *aceleración* adquiere un sello nítidamente prominente.

Voy a utilizar una forma de expresión geométrica, que se presenta inmediatamente, cuando se hace una abstracción del triplete x, y, z de manera implícita sobre t. Consideremos que un Punto del Mundo O cualesquiera, se puede convertir en el punto cero del *Espacio-Tiempo*. El cono $c^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ con O como vértice (Fig. 2) se compone de dos Partes, una con valores $t < 0$, otra diferente con valores $t > 0$. El primero, el *pre-cono de O*, está formado por todos los Puntos del Mundo que "envían luz hacia O", el segundo, el *post-cono de O*, está formado por todos los Puntos del Mundo que "reciben luz desde O". El área delimitado exclusivamente por el pre-cono podría llamarse: *este mundo de O*; el delimitado exclusivamente por el post-cono: *más allá de O*. *Más allá de O* cae en el cuenco hiperboloidico, ya considerado:

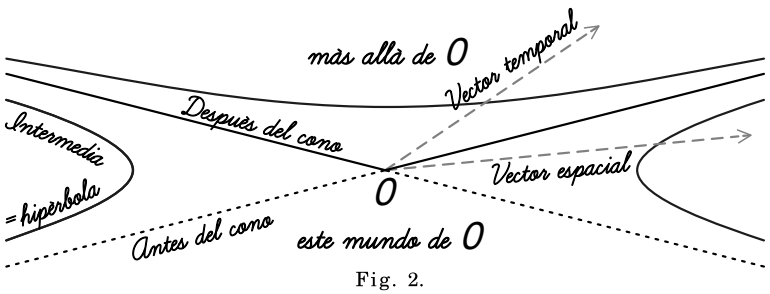

Fig. 2.

$$F = c^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad t > 0. \tag{2}$$

El área *entre los conos* está rellena por las estructuras hiperboloidicas de una hoja:

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2\,t^2 = k^2 \tag{3}$$

para todos los valores positivos constantes k^2. Para nosotros son importantes las hipérbolas con O como centro, las cuales residen en estas últimas estructuras. Las ramas individuales de estas hipérbolas pueden llamarse justamente: *las hipérbolas intermedias, al centro O*. Una rama de hipérbole así, debería pensarse como la línea del mundo de un punto sustancial que representa un movimiento que, para $t = -\infty$ y $t = +\infty$, está aumentando asintóticamente hacia la velocidad de la luz c.

En analogía con el concepto de vector en el espacio, llamaremos ahora a una trayectoria dirigida hacia la variedad en x, y, z, t: un *Vector*, entonces debemos de distinguir entre los vectores *de tipo tiempo* con orientación de O hacia el cuenco $+F = 1$, $t > 0$; y los vectores tipo *espaciales* con orientación de O hacia $-F = 1$. El *Eje del Tiempo* puede estar en paralelo con cualquier vector del primer tipo. Un *Punto del Mundo* cualquiera, entre el pre-cono y el post-cono de O, puede ser establecido por medio de este sistema de referencia como *simultáneo* con O, pero igualmente también como *anterior* a O, o como *posterior* a O. Todo Punto del Mundo en *"este mundo*

de O" es necesariamente siempre anterior, todo Punto del Mundo en *"más allá de O"* es necesariamente siempre posterior a O. La transición del límite a $c = \infty$ tendría que corresponder a un colapso completo de la incisión en forma de cuña entre los conos en la variedad plana $t = 0$. En las figuras dibujadas esta incisión se hace intencionalmente con diferentes anchos.

Descomponemos un vector cualquiera, como el de O hacia x, y, z, t, en sus cuatro *componentes* x, y, z, t. Si las direcciones de dos vectores son, respectivamente, la de un radio vector OR, desde O hacia una de las superficies $\mp F = 1$, y también una tangente RS en el punto R de la superficie en cuestión, entonces los vectores deben llamarse *normales* entre sí. Se sigue que

$$c^2\, t\, t_1 - x\, x_1 - y\, y_1 - z\, z_1 = 0$$

es la condición para que los vectores con las componentes x, y, z, t y x_1, y_1, z_1, t_1 sean normales entre sí.

Las *escalas unitarias*, para las *magnitudes* de los vectores en las distintas direcciones, deben de fijarse así: para un vector espacial, desde O hacia $-F = 1$, siempre tiene la magnitud 1; para un vector temporal, desde O hacia $+ F = 1$, $t > 0$, siempre se le atribuye la magnitud $1/c$.

Ahora, pensemos en un punto del mundo $P(x, y, z, t)$, que por ahí, pasa una línea de mundo de un punto sustancial, entonces se tiene que el *valor de línea* del elemento vectorial tipo tiempo dx, dy, dz, dt en progreso, equivale a:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\,.$$

Al valor de esta Integral $\int d\tau = \tau$, evaluada sobre la línea del mundo desde cualquier punto inicial fijo P_0 hasta el punto final variable P, le llamaremos: el *Tiempo Propio* del punto sustancial en P. En esta Linea del Mundo consideraremos a x, y, z, t, es decir las componentes del vector OP, como funciones del tiempo propio τ, cuyo primer cociente diferencial respecto de τ denotamos como $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$, cuyo segundo cociente diferencial respecto de τ, como $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$; y a sus vectores asociados llamaremos, a la derivada del vector OP respecto de τ: el *vector de movimiento* en P; y a la derivada de este vector de movimiento respecto de τ: el *vector de aceleración* en P. Además es válido

$$c^2\, \dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2,$$
$$c^2\, \dot{t}\, \ddot{t} - \dot{x}\, \ddot{x} - \dot{y}\, \ddot{y} - \dot{z}\, \ddot{z} = 0,$$

es decir, el vector de movimiento es un *vector de tipo tiempo* en la dirección de la línea de mundo en P con magnitud 1, y el vector de aceleración en P es normal al vector de movimiento en P, por lo que en definitiva es un *vector de tipo espacial.*

Ahora bien, como se ve fácilmente, existe una determinada rama de la hipérbole que tiene, en común con la línea de mundo en P, tres puntos infinitamente cercanos y cuyas asíntotas son generatrices de un pre-cono y un post-cono (véase abajo la Fig. 3). Esta rama de la hipérbole se llama *hipérbola de curvatura* en P. El centro de esta hipérbola es M, así que aquí, estamos tratando con una hipérbola intermedia al centro M. Si ϱ es la magnitud del vector MP, *entonces podemos reconocer al vector de aceleración en P como el vector en la dirección de MP con magnitud c^2/ϱ.*

Si $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$ fueran todas ellas cero, entonces la hipérbola de curvatura se reduce a la línea recta que toca la línea de mundo en P, y se establecería que $\varrho = \infty$.

IV.

Para demostrar que la presunción del grupo G_c en ningún caso conduce a una contradicción de las leyes físicas, será indispensable realizar una revisión de toda la física sobre la base de la presuposición de este grupo. Esta revisión ya se ha completado con éxito hasta cierto punto para las cuestiones de termodinámica y radiación térmica [1]), para los procesos electromagnéticos y, por último, para la mecánica manteniendo el concepto de masa [2]).

Para esta última área, se plantea sobre todo la pregunta: Si una fuerza con las componentes X, Y, Z actúa a lo largo de los ejes espaciales en un punto del mundo $P(x, y, z, t)$, donde el vector de movimiento es $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$, ¿como que fuerza debe entenderse dicha fuerza ante un cambio del sistema de referencia cualquiera? Ahora existen ciertos enfoques probados sobre la fuerza ponderomotriz en el campo electromagnético, en los casos donde se debe permitir el grupo G_c sin ninguna duda. Estos enfoques conducen a la simple regla: *Ante un cambio del sistema de referencia, la fuerza presupuesta se aplica tal como una fuerza en las nuevas coordenadas espaciales, al mismo tiempo que el vector asociado con los componentes*

$$\dot{t}\,X,\ \dot{t}\,Y,\ \dot{t}\,Z,\ \dot{t}\,T$$

permanece sin cambios, donde

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}\,X + \frac{\dot{y}}{\dot{t}}\,Y + \frac{\dot{z}}{\dot{t}}\,Z\right)$$

es la potencia (tasa del trabajo) de la fuerza en ese punto del mundo dividida por c^2). Este vector siempre es normal al vector de movimiento en P. Un vector de fuerza de este tipo, perteneciente a una fuerza en P, debería llamarse *un vector de fuerza motriz* en P.

---

[1]) M. Planck, *De la Dinámica de los Sistemas en Movimiento*, Berlines, Berlín, 1907, página 542 (también Annalen der Physik, 26, 1908, página 1).

[2]) H. Minkowski, *Las Ecuaciones Básicas para los Procesos Electromagnéticos en Cuerpos en Movimiento*, Notic. Gotinga. 1908, página 53.

Ahora, si esa línea de mundo que pasa a través de P, se describe mediante un punto sustancial con una *masa mecánica* constante m. El m-veces vector de movimiento en P se llama *el vector momentum* en P; el m-veces vector de aceleración en P, el *vector de fuerza del movimiento* en P. Según estas definiciones la ley establece para ello, cómo tiene lugar el movimiento de un punto de masa para un vector de fuerza motriz dado[1]):

El vector de fuerza del movimiento es igual al vector de fuerza motriz.

Esta declaración resume las cuatro ecuaciones para las componentes a lo largo de los cuatro ejes juntos, en donde la cuarta, debido a que en principio los dos vectores mencionados son normales al vector de movimiento, se puede ver como una consecuencia de las tres primeras. Según el significado anterior de T, la cuarta sin duda representa la ley de la energía. Por lo tanto, la energía cinética del punto de masa debe definirse como c^2-veces la componente del vector momentum a lo largo del eje t. La expresión para esto es

$$m c^2 \frac{dt}{d\tau} = m c^2 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ ,$$

que es, tras extraer la constante aditiva mc^2, la expresión $\frac{1}{2}mv^2$ de la mecánica newtoniana con excepción de las magnitudes del orden $1/c^2$. En este caso, aparece muy claramente la dependencia de la energía respecto del sistema de referencia. Pero como ahora el eje t se puede colocar en la dirección de cualquier vector de tipo temporal, entonces la ley de energía, formulada por otra parte para cualquier sistema de referencia posible, ya contiene el sistema completo de las ecuaciones de movimiento. Este hecho conserva su importancia con la discutida transición en el limite de $c = \infty$ incluso para la estructura axiomática de la mecánica newtoniana, y es aquí que, en ese sentido, ya ha sido reconocido por el señor J. R. Schütz[2]).

Se puede establecer, desde el principio, la relación entre la unidad de longitud y la unidad de tiempo, de tal manera que el límite de velocidad natural sea $c = 1$. Después también se introduce $\sqrt{-1} \cdot t = s$ en lugar de t, entonces la expresión diferencial cuadrática

$$d\tau^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - ds^2 \, ,$$

será así completamente simétrica en x, y, z, s, y esta simetría se transfiere a una ley cualesquiera que no contradiga el postulado del mundo. Después de eso, uno puede revestir matemáticamente la esencia de este postulado de forma muy concisa, en la fórmula mística:

$$3 \cdot 10^5 \,\mathrm{km} = \sqrt{-1}\,\mathrm{sec}. \qquad (4)$$

---

[1]) H. Minkowski, a. a. O., p. 107. — Cf. también M. Planck, Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft, Vol. 4, 1906, pág. 136.

[2]) J. R. Schütz, *El Principio de la Conservación Absoluta de la Energía*, Noticias de la Real Sociedad de Ciencias de Göttingen, 1897, p. 110.

V.

Las ventajas creadas por el postulado del mundo probablemente se puedan demostrar con algo más concluyente, como el poner en evidencia los efectos que proceden de una *carga puntual en movimiento arbitraria* según la teoría de Maxwell-Lorentz. Pensemos en la línea de mundo de tal electrón puntual con la carga e, y conduciéndose con ella el tiempo propio τ; uno hecho desde cualquier punto de partida. Para tener el campo inducido por el electrón en un *punto del mundo* cualquiera P_1, construimos el pre-cono correspondiente a P_1 (Fig. 4). Este se encuentra con la línea de mundo ilimitada del electrón, dado que sus direcciones son en todas partes las de vectores tipo tiempo, aparentemente en un único punto P. Colocamos en P una tangente a la linea de mundo y construimos a través de P_1 la normal P_1Q a esta tangente. La magnitud de P_1Q resulta r. La magnitud de PQ se calculará entonces como r/c, conforme a la definición de un pre-cono. *Ahora el vector en dirección PQ de magnitud e/r representa, en sus componentes a lo largo de los ejes x, y, z, el potencial vectorial multiplicado por c; en la componente a lo largo del eje t, el potencial escalar del campo excitado por e para el punto del mundo en P_1.* Aquí es donde residen las leyes elementales establecidas por A. Liénard y por E. Wiechert[1]).

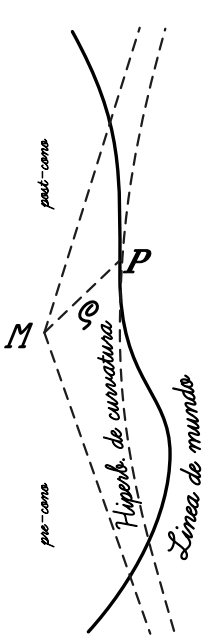

Fig. 3.

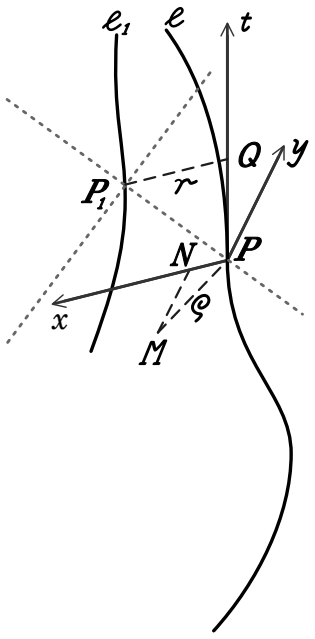

Fig. 4.

En la descripción del campo producido por el propio electrón, se hace evidente entonces que la separación del campo en una fuerza eléctrica y otra magnética es relativa con respecto al eje del tiempo utilizado como base; más claramente, ambas fuerzas juntas se pueden describir en una cierta analogía, si bien no completa, como la descomposición del vector de fuerza y el vector momentum que actúan sobre un cuerpo rígido en la mecánica.

Ahora quiero describir *el efecto ponderomotriz ejercido por una carga puntual que se mueve arbitrariamente sobre otra carga puntual distinta que se mueve también arbitrariamente.* Nos imaginamos la *línea del mundo* de

[1]) A. Liénard, Campo eléctrico y magnético producido por una carga concentrada en un punto y que se desplaza en cualquier dirección, *L'Eclairage électrique*, T. 16, 1898, pp. 5, 53, 106; E. Wiechert, Leyes Elementales Electrodinámicas, *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles* (2), T. 5, 1900, pág. 549.

un segundo electrón puntual con carga e_1 que pasa por el *punto del mundo* P_1. Determinamos P, Q, r como antes, luego construimos (Fig. 4) el punto central M de la hipérbola de curvatura en P, finalmente la normal MN de M a una línea recta imaginada a través de P paralela a QP_1. Ahora determinamos, con P como punto de partida, un sistema de referencia como sigue: el eje t en la dirección de PQ, el eje x en la dirección de QP_1, el eje y en la dirección de MN, con lo cual finalmente también se determina la dirección del eje z como normal a los ejes t, x, y. El vector de aceleración en P es $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$, el vector de movimiento en P_1 es $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, $\dot{t}_1$. *Ahora, el vector de fuerza motriz ejercido por el primer electrón* e *que se mueve arbitrariamente sobre el segundo electrón* e_1 *que se mueve arbitrariamente en* P_1, *consiste:*

$$-\,e\,e_1\Big(\dot{t}_1 - \frac{\dot{x}_1}{c}\Big)\mathfrak{K}, \tag{5}$$

donde para las componentes $\mathfrak{K}_x$, $\mathfrak{K}_y$, $\mathfrak{K}_z$, $\mathfrak{K}_t$ *del vector* $\mathfrak{K}$, *existen las tres relaciones:*

$$c\,\mathfrak{K}_t - \mathfrak{K}_x = \frac{1}{r^2}, \quad \mathfrak{K}_y = \frac{ij}{c^2\,r}, \quad \mathfrak{K}_z = 0 \tag{6}$$

y en cuarto lugar, este vector $\mathfrak{K}$ *es normal al vector de movimiento en* P_1, *y solo por esta circunstancia se encuentra en dependencia de este último vector de movimiento.*

Si se comparan con este enunciado las formulaciones anteriores[1]) de la misma ley elemental sobre el efecto ponderomotor de cargas puntuales en movimiento entre si, entonces no se puede sino admitir que las condiciones entrantes, aquí en consideración, revelan su naturaleza interna, con toda simplicidad, solo en cuatro dimensiones, pero solo arrojan una proyección muy complicada sobre un espacio tridimensional impuesto desde el principio.

En la mecánica reformada de acuerdo con el postulado del mundo, las desarmonías que han perturbado a la mecánica newtoniana y a la electrodinámica moderna desaparecen por sí solas. También me gustaría abordar la situación de la antigua ley de la atracción de Newton con este postulado. Quiero suponer que cuando dos puntos de masa m, m_1 describen sus líneas de mundo, se ejerce un vector de fuerza motriz desde m sobre m_1, exactamente por la expresión que se acaba de dar en el caso de los electrones, excepto que en lugar de $-\,e\,e_1$, ahora debería aparecer $+\,m\,m_1$. Ahora consideramos específicamente el caso donde el vector de aceleración de m es constantemente cero, en cuyo caso podemos introducir entonces t de tal forma que m debe considerarse en reposo, y

[1]) K. Schwarzschild, Noticias de la Real Sociedad de Ciencias de Göttingen, 1903, página 132. — H. A. Lorentz, Enciclopedia de Ciencias Matemáticas, Vol. V, 14, página 199.

el movimiento de m_1 se produzca únicamente con ese vector de fuerza motriz que se origina desde m. Ahora modificaremos este vector indicado, primero colocando el factor $\dot{t}^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, el cual deviene a 1 excepto para magnitudes del orden $1/c^2$, entonces se demuestra [1]), que para las ubicaciones x_1, y_1, z_1 de m_1 y de su transcurso en el tiempo, surgirían de nuevo exactamente las leyes de Kepler, solo que al hacerlo en lugar de los tiempos t_1 se producirían los tiempos propios τ_1 de m_1. Sobre la base de esta simple consideración, se puede ver entonces, que la ley de la atracción propuesta vinculada con la nueva mecánica no es menos adecuada para explicar las observaciones astronómicas que la ley de la atracción de Newton vinculada a la mecánica newtoniana.

También las ecuaciones básicas para los procesos electromagnéticos en los cuerpos ponderables se ajustan perfectamente al postulado del mundo. Incluso la derivación de estas ecuaciones, sobre la base de las ideas de la teoría de los electrones enseñadas por Lorentz, no tiene en absoluto por qué abandonarse al final, como mostraré en otro lugar.

Entonces la validez sin excepción alguna del postulado del mundo es, me gustaría creer, el verdadero núcleo de una visión electromagnética del universo; lo encontrado por Lorentz, desarrollado posteriormente por Einstein se encuentra por ahora prácticamente completa. En la formulación avanzada de las consecuencias matemáticas habrá suficientes indicios para las verificaciones experimentales del postulado, estas se presentan incluso para aquellos a quienes les es desagradable o doloroso abandonar las viejas concepciones conocidas, con la idea de reconciliar una armonía preestablecida entre la matemática pura y la física.

---

[1]) H. Minkowski, a. a. O., p. 110.

Licencia: CC BY-NC-SA 3.0 IGO, Omar Ancka Quispe